L'épreuve de Mathématiques comporte deux problèmes indépendants, de niveau et de longueur comparables. Il sera tenu compte dans la correction de la clarté des raisonnements et de la présentation des résultats.

Durée totale : 4 heures

Le programme de Mathématiques correspond au programme de la classe préparatoire de 1ère année PCSI.

PROBLEME I

On considère la matrice A de $M_3(R)$ $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Soit E l'ensemble des matrices M_{abc} de $M_3(R)$ de la forme $M_{abc} = aA + bA^2 + cA^3$ où a, b, c sont trois réels.

① Montrer que E est un espace vectoriel sur R .

② Montrer que E est un sous-anneau de $M_3(R)$
Cet anneau est-il commutatif ?

③ Calculer A^{-1}
Toutes les matrices de E sont-elles inversibles ?

④ Soit f l'endomorphisme de R^3 dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de R^3 est I - A.

Déterminer Ker f et Im f ; préciser leurs bases.
Préciser le rang de f .

⑤ Soit u le vecteur de R^3 de coordonnées (a, b, c) dans la base canonique de R^3. On considère les endomorphismes φ de R^3 vérifiant :

$$\varphi(e_1) = e_2$$
$$\varphi(e_2) = e_3$$
$$\varphi(e_3) = u$$
$$\varphi(u) = e_1$$

Montrer qu'il existe deux endomorphismes φ_1 et φ_2 vérifiant ces relations.

Ecrire les matrices M_1 et M_2 de φ_1 et φ_2 dans la base (e_1, e_2, e_3) de R^3

ECOLE CENTRALE D'ELECTRONIQUE

PROBLEME II

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in N}$ définies sur R par :

$f_n(x) = \dfrac{x^n}{e^x - 1}$ **si** $x \neq 0$

$f_1(0) = 1$

$f_n(0) = 0$ **si** $n > 1$ **avec** n **un entier naturel non nul.**

PROBLEME II - *Partie A*

① Etudier la continuité et la dérivabilité des fonctions f_n sur R.

② Soit φ_n la fonction définie sur R par $\varphi_n(x) = e^x(n-x) - n$

- Etudier les variations de φ_n. Montrer que si $n \geq 2$ l'équation $\varphi_n(x) = 0$ possède deux solutions distinctes sur R. Montrer que l'une des solutions, notée α_n, appartient à $]n-1, n[$
- Préciser le signe de φ_n sur R.

③ Etudier les variations de f_n sur R. On distinguera plusieurs cas selon les valeurs de n.

- Préciser $f_n(\alpha_n)$.
- Etudier les branches infinies de la courbe représentative C_n de la fonction f_n
- Montrer que toutes les courbes C_n ont un point en commun.

④ - Montrer que f_1 possède, sur un intervalle que l'on précisera, une application réciproque f_1^{-1}
- Préciser l'ensemble de définition, la continuité, la dérivabilité et le sens de variation de f_1^{-1}
- Donner l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 à la courbe représentative de f_1^{-1}

⑤ Montrer que l'équation $f_2'(x) = 0$ possède une solution unique. Préciser la tangente à l'origine à la courbe C_2.

ECOLE CENTRALE
D'ELECTRONIQUE

PROBLEME II - *Partie B*

On considère la suite $(u_n)_{n\in N}$ définie pour $n \in N^*$ par $u_n = \int_0^n f_2(t)dt$

① Montrer que l'intégrale $I_1 = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$ existe. Préciser sa valeur.

② Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in N}$.

③ Montrer qu'il existe un réel a positif tel que $\forall t \in [a,+\infty[\qquad f_2(t) \le 2t^2 e^{-t}$

④ Montrer que la suite $(u_n)_{n\in N}$ est convergente.

⑤ Soit la suite $(v_n)_{n\in N}$ définie par $v_n = \int_0^n f_2(t)e^{-kt} dt$ avec $k \in N^*$

Montrer que pour tout entier n : $0 \le v_n \le \frac{\alpha_2(2-\alpha_2)}{k}$

Montrer que la suite $(v_n)_{n\in N}$ est convergente.

⑥ Soit l'intégrale $I_k = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-kt} dt$ avec $k \in N^*$

Justifier l'existence de I_k et la calculer.

⑦ Montrer que $\forall k \in N^*$ et $\forall x \in R^*$

$$\frac{1}{e^x - 1} = \sum_{j=1}^{k} e^{-jx} + \frac{e^{-kx}}{e^x - 1}$$

En déduire $v_n = u_n - \sum_{j=1}^{k} \int_0^n t^2 e^{-jt} dt$

⑧ Soit L la limite de la suite $(u_n)_{n\in N}$.
Soit L_k la limite de la suite $(v_n)_{n\in N}$

Montrer que $\sum_{j=1}^{k} I_j = L - L_k$

⑨ Montrer que $\lim_{k \to +\infty} L_k = 0$

En déduire $L = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k^3}$

ECOLE CENTRALE D'ELECTRONIQUE